XXII Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

районный тур, решения

2014

29 ноября

---

10 класс

---

1. В среднем за год на всю поверхность Земли падает 10^4 тонн метеоритного вещества. Оцените массу метеоритного вещества, которое выпало на территорию современного Петербурга за время существования города.

Решение:

Город Санкт-Петербург был основан 27 мая 1703 года, то есть 311 лет назад. За это время на поверхность Земли выпало примерно $M = 3 \cdot 10^6$ тонн метеоритного вещества. Для оценки можно считать, что метеоритное вещество распределено по поверхности Земли равномерно. В этом случае доля выпавшего на территорию Петербурга вещества будет равна отношению площади Петербурга к площади поверхности Земли. Линейные размеры города можно считать приближенно равными 30 км $\times$ 50 км, тогда площадь составит $S \approx 1.5 \cdot 10^3$ км^2 (это хорошая оценка — точная площадь Петербурга равна 1439 км^2). Отсюда искомая масса метеоритного вещества равна

$$m = M \cdot \frac{S}{4\pi R_\oplus^2} = 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1.5 \cdot 10^3}{4 \cdot 3.14 \cdot (6.4 \cdot 10^3)^2} \approx 10 \text{ тонн.}$$

Здесь $R_\oplus$ — радиус Земли.

2. Собственным движением называется скорость углового перемещения звезд по небесной сфере, связанного с движением звезд в пространстве. Обычно оно составляет $1''$/год или менее. У каких звезд примерно одинаковой видимой звездной величины собственные движения в среднем больше: у горячих или у холодных? Почему?

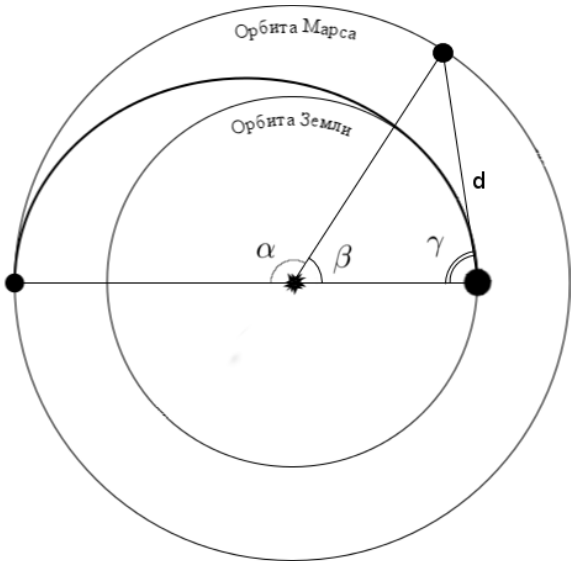
Решение:

Красные (холодные) звезды холоднее белых (горячих), и их светимость в среднем меньше (за исключением отдельного класса звезд — красных гигантов). Так как блеск звезд одинаков, значит, более яркие белые звезды находятся дальше, чем красные. Если принять скорости звезд примерно одинаковыми, то звезды, которые находятся к нам ближе, будут иметь большее угловое смещение за единицу времени, т.е. их собственное движение будет больше. Итоговый ответ: у холодных.

3. С Земли на Марс была запущена автоматическая межпланетная станция по наиболее экономичной орбите. Каково было угловое расстояние Марса от Солнца в момент запуска для земного наблюдателя? Орбиты Марса и Земли считать круговыми и лежащими в одной плоскости, радиус орбиты Марса равен 1.5 а.е.

Решение:

Наиболее энергетически выгодная траектория перелета — половина так называемого эллипса Гомана, касающегося орбит Земли и Марса.



Как видно из рисунка, большая полуось такой орбиты равна

$$a = \frac{a_{\oplus} + a_{♂}}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25 \text{ а.е.}$$

Здесь $a_{\oplus}$ и $a_{♂}$ — большие полуоси орбит Земли и Марса соответственно.

Найдем длину дуги (в градусах), которую пройдет Марс за время полета станции (на рисунке соответствующий угол обозначен буквой α). Очевидно, время полета станции равно $T/2$, где T — период обращения по гомановскому эллипсу. Обозначив период обращения Марса вокруг Солнца как $T_{♂}$, по III закону Кеплера имеем:

$$\alpha = 360° \cdot \frac{T/2}{T_{♂}} = 360° \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a_{♂}}\right)^{3/2} = 180° \cdot \left(\frac{1.25}{1.5}\right)^{3/2} \approx 137°.$$

В треугольнике Солнце–Земля–Марс угол $\beta = 180° - 137 = 43°$. По теореме косинусов найдем расстояние от Земли до Марса d в момент запуска (будем считать, что $\cos 43° \approx \cos 45° = \sqrt{2}/2$):

$$d = \sqrt{a_{\oplus}^2 + a_{♂}^2 - 2a_{\oplus}a_{♂}\cos\beta} = \sqrt{1^2 + 1.5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1.5 \cdot \sqrt{2}/2} \approx 1 \text{ а.е.}$$

Получилось, что рассматриваемый треугольник является равнобедренным с углом при основании, равным 43°. Тогда искомый угол $\gamma = 180° - 2 \cdot 43° = 94°$.

4. Звезда вращается вокруг своей оси с периодом 10^{-2} с. Какой может быть средняя плотность вещества такой звезды?

Решение:

Очевидно, скорость вращения звезды на экваторе не должна быть больше первой космической скорости для нее, иначе звезду просто разорвет. Отсюда:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \leqslant \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

где R, M и T — радиус, масса и период обращения звезды вокруг своей оси соответственно, G — гравитационная постоянная.

Возводя обе части неравенства в квадрат и принимая во внимание, что $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$, получаем ограничение на значение плотности ρ:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \leqslant \frac{4\pi R^3 G\rho}{3R},$$

$$\rho \geqslant \frac{3\pi}{GT^2},$$

$$\rho \geqslant \frac{3 \cdot 3.14}{(6.67 \cdot 10^{-11}) \cdot (10^{-2})^2} \approx 1.4 \cdot 10^{15} \text{ кг/м}^3.$$

Такая огромная плотность характерна для нейтронных звезд.

5. Двойная звезда состоит из компонент с массами, равными 4.0 и 2.4 масс Солнца, обращающихся друг вокруг друга по круговым орбитам. Орбитальный период системы составляет 100 лет, а расстояние до нее — 20 пк. Оцените диаметр объектива телескопа, в который можно будет увидеть обе компоненты двойной системы как отдельные объекты.

Решение:

Выражая орбитальный период системы T в годах, расстояние между компонентами a в астрономических единицах, а массы звезд M_1 и M_2 - в массах Солнца, запишем III закон Кеплера в виде

$$T^2 = \frac{a^3}{M_1 + M_2}.$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{T^2 \cdot (M_1 + M_2)} = \sqrt[3]{100^2 \cdot (4.0 + 2.4)} = 40 \text{ а.е.}$$

Известно, что отрезок длиной 1 а.е. с расстояния в 1 пк виден под углом, равным $1''$. Так как двойная система находится в 20 раз дальше, а расстояние между компонентами двойной в 40 раз больше, угловое расстояние между звездами составит $\alpha = 40/20 = 2''$.

Чтобы наблюдать компоненты двойной системы раздельно, необходим телескоп с предельным угловым разрешением не большим, чем угловое расстояние между звездами, то есть

$$\alpha \gtrsim \frac{\lambda}{D} \cdot (2 \cdot 10^5)'',$$

где λ — длина волны, на которой ведутся наблюдения, D — диаметр объектива телескопа. Принимая, что середина оптического диапазона приходится на длину волны около 550 нм, получаем:

$$D \geqslant \frac{\lambda \cdot (2 \cdot 10^5)''}{\alpha} = \frac{(5.5 \cdot 10^{-7}) \cdot (2 \cdot 10^5)''}{2''} \approx 6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6 \text{ см}.$$